Domácí úkol ze cvičení 13 – jako příprava na příští (poslední) cvičení:

Zkuste, zda byste vyřešili něco z následujících příkladů (viz věta o implicitní funkci z přednášky) a připravte si, prosím, případné dotazy :

1. Ukažte, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=f(x)$.
   Pak a) vypočítejte $f'(x_0)$ a $f''(x_0)$;
   b) napište rovnici tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) ;
   c) aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když:
   i) $F(x,y)=x^2-y^3+x^2y-1$, $(x_0,y_0)=(1,0)$
   ii) $F(x,y)=x^3+y^3-3xy-3$, $(x_0,y_0)=(1,2)$
   iii) $F(x,y)=xy-e^x+e^y$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

2. a) Dokažte, že rovnicí $2x^2+2y^2+z^3+8xz-z+8=0$
   je definována implicitně v okolí bodu $(-2,0,1)$ funkce $z=f(x,y), f\in C^2(U(-2,0))$.
   b) Ukažte, že bod $(-2,0)$ stacionárním bodem funkce $f(x,y)$.
   c) Nabývá funkce $z=f(x,y)$ v bodě $(-2,0)$ lokální extrém?

3. a) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.

   b) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (1, 2, -1) k ploše, dané rovnicí
   $$x^3+y^3+z^3+xyz-6=0 \; .$$

A zkuste promyslet také příklady na hledání extrémů (a užití věty o Lagrangeových multiplikátorech) :

4. Vyšetřete globální extrémy funkce f na množině M, je-li:
   a) $f(x,y)=x^2+2y^2$, $M=\{(x,y)\in R^2;\ x^4+y^4=1\}$
   b) $f(x,y,z)=x+y+z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3; x^2+y^2\le z<1\}$
   c) $f(x,y,z)=x-2y+2z$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2=1\}$
   d) $f(x,y,z)=xy+z^2$, $M=\{(x,y,z)\in R^3;\ x^2+y^2+z^2\le 1\wedge x\ge 0\}$;